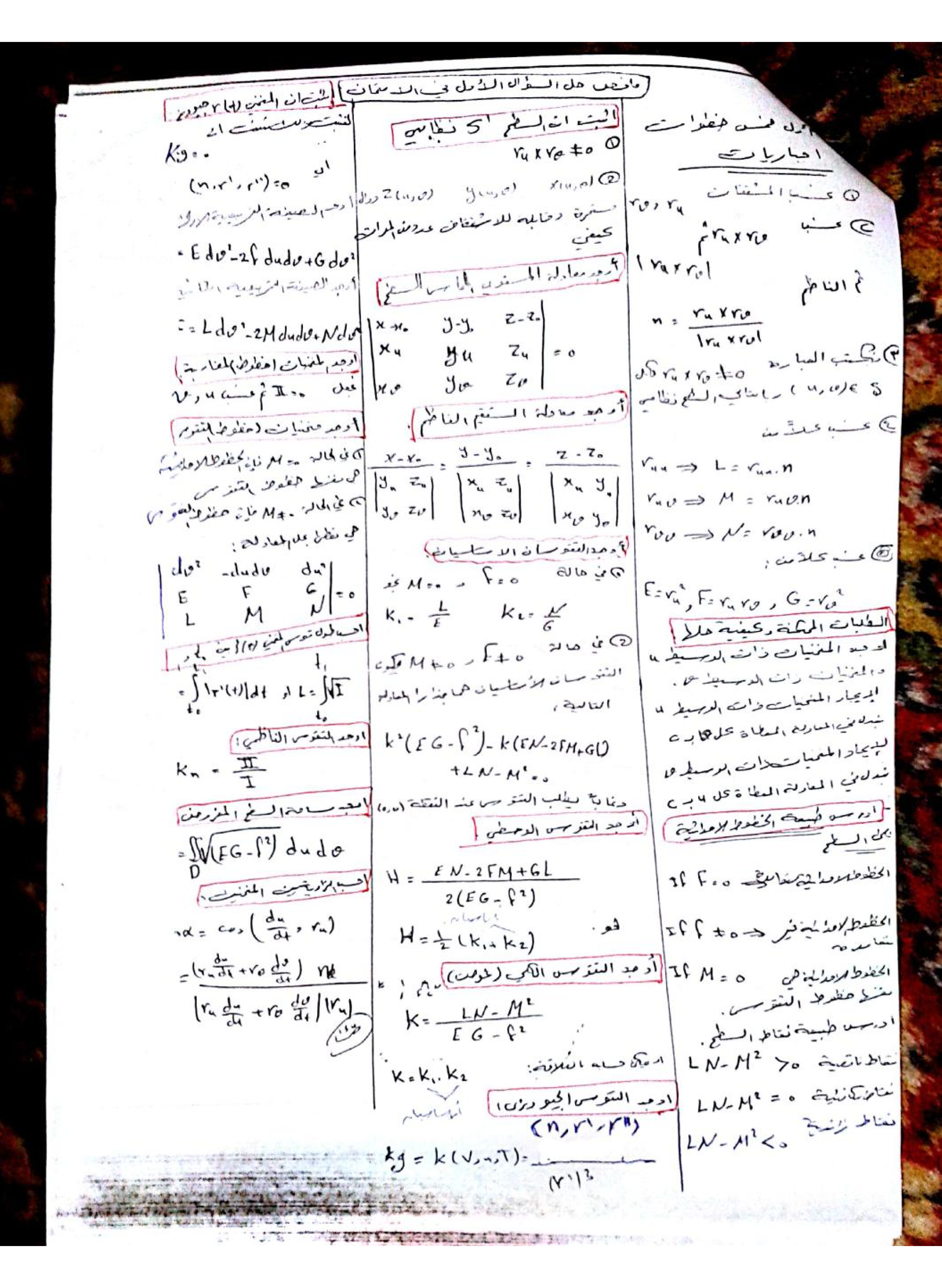


ملخص حل السؤال الأول في الامتحان

أول ملخص خطوات اجباريات

① حساب المشتقات r_u , r_v

② حساب $r_u \times r_v$ ثم $|r_u \times r_v|$

ثم الناظم

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

③ نكتب العبارة $r_u \times r_v \neq 0$ لكل $(u, v) \in S$ أي أن السطح نظامي

④ حساب كل من

$r_{uu} \Rightarrow L = r_{uu} \cdot n$

$r_{uv} \Rightarrow M = r_{uv} \cdot n$

$r_{vv} \Rightarrow N = r_{vv} \cdot n$

⑤ حساب كل من:

$E = r_u^2 , F = r_u r_v , G = r_v^2$

الطلبات الممكنة وكيفية حلها

اوجد المنحنيات ذات الوسيط u والمنحنيات ذات الوسيط v.

لإيجاد المنحنيات ذات الوسيط u نبدل في المعادلة المعطاة كل v بـ c

لإيجاد المنحنيات ذات الوسيط v نبدل في المعادلة المعطاة كل u بـ c

ادرس طبيعة الخطوط الإحداثية على السطح

If $F = 0$ الخطوط الإحداثية متعامدة

If $F \neq 0 \Rightarrow$ الخطوط الإحداثية غير متعامدة

If $M = 0$ الخطوط الإحداثية هي نفسها خطوط التقوس.

ادرس طبيعة نقاط السطح.

نقاط ناقصية $LN - M^2 > 0$

نقاط مكافئية $LN - M^2 = 0$

نقاط زائدية $LN - M^2 < 0$

اثبات السطح أنه نظامي

① $r_u \times r_v \neq 0$

② $x(u, v)$ ، $y(u, v)$ ، $z(u, v)$ دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق عدد من المرات كيفي

أوجد معادلة المستوي المماس للسطح

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

أوجد معادلة المستقيم الناظم

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

أوجد التقوسات الأساسية

① في حالة $F = 0$ و $M = 0$ عندئذ

$k_1 = \frac{L}{E}$ $\quad k_2 = \frac{N}{G}$

② في حالة $F \neq 0$ و $M \neq 0$ فيكون التقوسات الأساسية هما جذرا المعادلة التالية:

$$k^2(EG - F^2) - k(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0$$

دائماً يطلب التقوس عند النقطة (u, v)

أوجد التقوس الوسطي

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

أو: $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ (الأساسية)

أوجد التقوس الكلي (غوص)

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

او يمكن حسابه بالعلاقة: $K = k_1 . k_2$ (الأساسية)

أوجد التقوس الجيوديزي

$$k_g = k(V, n, T) = \frac{(n, r', r'')}{|r'|^3}$$

اثبات ان المنحني $r(t)$ جيوديزي

لنثبت ان $k_g = 0$ أي $(n, r', r'') = 0$

اوجد الصيغة التربيعية الأولى

$= E\,du^2 - 2F\,du\,dv + G\,dv^2$

اوجد الصيغة التربيعية الثانية

$= L\,du^2 - 2M\,du\,dv + N\,dv^2$

اوجد المنحنيات (الخطوط) المقاربة

نحل $II = 0$ بالنسبة لـ u , v

اوجد منحنيات (خطوط) التقوس

① في الحالة $M = 0$ فإن الخطوط الإحداثية هي نفسها خطوط التقوس

② في الحالة $M \neq 0$ فإن خطوط التقوس هي حلول المعادلة:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

احسب طول قوس المنحني $r(t)$ بين t_0 و t_1

$$= \int_{t_0}^{t_1} |r'(t)|\,dt \quad \text{او} \quad L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I}$$

اوجد التقوس الناظمي:

$$k_n = \frac{II}{I}$$

احسب مساحة السطح المنزمن

$$= \iint_D \sqrt{(EG - F^2)}\,du\,dv$$

احسب الزاوية بين المنحنيات

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{du}{dt}, r_u\right) = \frac{\left(r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt}\right) r_u}{\left|r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt}\right| |r_u|}$$

Scanned by CamScanner

لتكن S سطح معطى بالمعادلة $r(u,v)=(u,v,uv)$ ومعرف على النطاق $D \subseteq R^2$ الذي يركزه نقطة الأصل $(0,0)$ والمطلوب: ① اوجد المنحنيات ذات الوسيط u والمنحنيات ذات الوسيط v

② اوجد التقوس الوسيطي والتقوس غوص للسطح في نقطة الأصل

③ اوجد المنحنيات المقاربة واوجد طبيعة نقاط السطح

④ بفرض $r(t)=(t,0,0)$ منحني واقع على السطح اثبت ان هذا المنحني جيوديزي ؟ احسب طول قوس هذا المنحني بين النقطتين الموافقتين للوسيط 0 و 1

[1]

الحل

$$r_u=(1,0,v), \quad r_v=(0,1,u) \quad r_u \times r_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix}=(-v,-u,1)=(0,0,1)$$

$$|r_u \times r_v|=1 \Rightarrow n=\frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}=\frac{(0,0,1)}{1}=(0,0,1)$$

بما ان $r_u \times r_v \neq 0$ حيث $u \in S$ فان السطح المعطى نظامي

نحسب كلاً من L M N حيث

$$L=r_{uu}\cdot n, \quad M=r_{uv}\cdot n, \quad N=r_{vv}\cdot n \Rightarrow r_{uu}=(0,0,0), \quad r_{uv}=(0,0,1), \quad r_{vv}=(0,0,0) \Rightarrow L=0, \quad M=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}=1, \quad N=0$$

نحسب كلاً من E , F , G حيث

$$E=r_u^2=1+v^2$$
$$F=r_u r_v=uv$$
$$G=r_v^2=1+u^2$$

① المنحنيات ذات الوسيط u نعطيها بتعويض كل v بـ c في المعادلة المعطاة اي $r=(u,c,cu)$ وهو مستقيم

المنحنيات ذات الوسيط v هي $r=(c,v,cv)$ وهو مستقيم

② التقوس الوسيطي

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}=\frac{\frac{-2uv}{\sqrt{u^2+v^2+1}}}{2(1+u^2+v^2-u^2v^2)}=\frac{-uv}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow H\Big|_{(0,0)}=0$$

التقوس غوص

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-1}{(1+u^2+v^2)^2} \Rightarrow K\Big|_{(0,0)}=-1$$

③ المنحنيات المقاربة $II=0$

$$II=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=\frac{2}{\sqrt{u^2+v^2+1}}\,du\,dv$$

تكون المنحنيات مقاربة عندما $II=0$

$$du\,dv=0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{u^2+v^2+1}}\,du\,dv=0$$

$u=c$, $v=c$

طبيعة نقاط السطح

$LN-M^2$ نوجدها

$$LN-M^2 = 0 - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} = -1 < 0$$

جميع نقاط السطح زائدية

(٥) $r(t) = (t, 0, 0)$

$$K_g = K(K, n, T) = K_d \frac{(n, r', r'')}{|r'|^3}$$

حتى يكون المنحني جيوديزي يجب ان يكون $K_g = 0$ أي $(n, r', r'') = 0$

$$r(t, 0, 0) \Rightarrow r'(1, 0, 0) \Rightarrow r''(0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (n, r', r'') = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي المنحني جيوديزي.

طول قوس المنحني بين $t=0$ و $t=1$

$$L = \int_0^1 |r'(t)|\, dt = \int_0^1 1\, dt = t\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

لتكن S سطحاً معطى بالمعادلة $r(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ ومعرفة على المجال $D \subseteq R^2$ الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ والمطلوب:

1. ادرس طبيعة ~~السطح~~ نقطة الأصل وطبيعة الخطوط الاحداثية المارة بها
2. اوجد المنحنيات ذات الوسيط u والمنحنيات ذات الوسيط v
3. اوجد التقوس الوسيطي والتقوس غوص للسطح في نقطة الأصل.
4. اوجد المنحنيات المقاربة ومنحنيات التقوس على هذا السطح
5. برهن ان المنحني $r(t) = (t, 0, t^2)$ الواقع على السطح المعطى ان هذا المنحني جيوديزي.

(2)

الحل

$$r_u = (1, 0, 2u), \quad r_v = (0, 1, -2v) \quad r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (-2u, +2v, 1) \Rightarrow |r_u \times r_v| = \sqrt{4u^2+4v^2+1}$$

$$\Rightarrow n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} = (0, 0, 1)$$

$$r_{uu} = (0,0,2), \quad r_{uv} = (0,0,0), \quad r_{vv} = (0,0,-2)$$

$$L = r_{uu}\cdot n = 2, \quad M = r_{uv}\cdot n = 0, \quad N = r_{vv}\cdot n = -2$$

$$E = r_u^2 = 1+4u^2\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$F = r_u r_v = -4uv\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$G = r_v^2 = 1+4v^2\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\begin{matrix} L & M & N \\ E & F & G \end{matrix}$$

② نقطة الأصل (0,0) نقطة زائدية على السطح ودرسي لأن

$$LN - M^2 = -4 < 0$$

③ لأن $F = 0$ فإن الخطوط الإحداثية متعامدة على السطح S

المنحنيات ذات الوسيط u فيه $v = c$ أي $r = (u, c, u^2 - c^2)$ وهي قطع مكافئ

[illegible]

المنحنيات ذات الوسيط v فيه $u = c$ أي $r(c, v, c^2 - v^2)$ وهي قطع مكافئ

④ التقوس المتوسط

$$\Leftarrow H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

$$H = \frac{-2 - 2(0) + 2}{2(1)} = 0$$

التقوس غاوس الكلي

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{1} \Rightarrow K = -4$$

دالة تقوسات رئيسية — التقوسات الرئيسية هي

$$k_1 = \frac{L}{E} = 2, \quad k_2 = \frac{N}{G} = -2 \text{ وبالتالي}$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(0) = 0 \qquad K = k_1 k_2 = -4$$

④

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 2du^2 - 2dv^2$$

منحنيات مقاربة $II = 0 \Rightarrow 2du^2 - 2dv^2 = 0 \Rightarrow 2du^2 = 2dv^2$

$$du^2 = dv^2 \Rightarrow \boxed{du = \pm dv} \Rightarrow$$

بما أن $M = 0$ فإن خطوط التقوس هي نفسها الخطوط الإحداثية

⑥

$$r(t) = (t, 0, t^2) \rightarrow r'(t) = (1, 0, 2t) \rightarrow r''(t) = (0,0,2)$$

$$K_g = K(r, n, T) = \frac{(n, r', r'')}{|r'|^3}$$

يكون المنحني جيوديزي بسبب أن $K_g = 0$

$$(n, r', r'') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

منحني جيوديزي

ليكن S سطحاً معطى بالمعادلة $r(u,v) = (u+v, u-v, u.v)$ والمطلوب: [3]

① اثبت ان السطح S بسيط: اوجد المستقيم الناظم و المستوي المماس للسطح في النقطة (0,0)

② ادرس منتظمية نقاط السطح S ؟ اوجد [illegible] المقاربة [illegible]

③ [illegible] $r(t) = (t, t, 0)$ منحني واقع على S اوجد طول هذا المنحني بين النقطتين $t=0, t=1$

$$\left.\begin{array}{l} r_u = (1, 1, v) \\ r_v = (1, -1, u) \end{array}\right\} \quad r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = (u+v, -u+v, -2)$$

$$\Rightarrow |r_u \times r_v| = \sqrt{(u+v)^2 + (v-u)^2 + 4} = \sqrt{u^2+2uv+v^2+v^2-2uv+u^2+4} = \sqrt{2(u^2+v^2)+4}$$

$$\Rightarrow n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(u+v, v-u, -2)}{\sqrt{2(u^2+v^2)+4}}\Bigg|_{(0,0)}$$

$$n = \frac{(0, 0, -2)}{\sqrt{4}} = (0, 0, -1)$$

$$\left.\begin{array}{l} r_{uu} = (0, 0, 0) \\ r_{uv} = (0, 0, 1) \\ r_{vv} = (0, 0, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} L = r_{uu} \cdot n = 0 \\ M = r_{uv} \cdot n = -1 \\ N = r_{vv} \cdot n = 0 \end{array}$$

$E = r_u^2 = 2 + v^2$

$F = r_u r_v = uv$

$G = r_v^2 = 2 + u^2$

بما ان $r_u \times r_v \neq 0$ مهما كانت u, v في D فإن S سطح نظامي.

المستقيم الناظم

$$\frac{x-0}{\begin{vmatrix} 1 & v \\ -1 & u \end{vmatrix}} = \frac{y-0}{\begin{vmatrix} 1 & v \\ 1 & u \end{vmatrix}} = \frac{z-0}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} \Leftarrow \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

$$\Leftarrow \frac{x}{u+v} = \frac{y}{u-v} = \frac{z}{-2}$$

المستقيم الناظم

$$\Leftarrow \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-2}$$

معادلة المستوي المماس: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow \boxed{z = 0}$$

$LN-M^2 = -1 < 0$ .. ⟵ $LN-M^2$ طبيعة نقاط السطح

جميع نقاط السطح زائدية

الخطوط المقاربة I .. $\text{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = -2\,du\,dv$

$-2\,du\,dv = 0 \Rightarrow$

L M N
E F G

$v = c$ أو $u = c$ لوما

التقوسات الرئيسية $M \neq 0$ .. التقوسات الرئيسية هي جذور المعادلة

$$k^2(EG-F^2) - k(EN-2FM+LG) + LN-M^2 = 0$$

$$k^2(4) - k(0) + 0 + 1 = 0 \Rightarrow 4k^2 + 1 = 0 \Rightarrow 4k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow k = \mp\frac{1}{2}$$

$$L = \int_0^1 |\beta'(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,(t|_0^1) = \sqrt{2}$$

$$\beta'(t) = (1, 1, 0) \Rightarrow |\beta'(t)| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

لتكن السطح اللولبي S المعرف بالمعادلة $r(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au)$ والمطلوب:

① اوجد الخطوط التقوس والخطوط المتقاربة على السطح S

② اوجد التقوس الكلي والتقوس المتوسط للسطح S ④

③ اوجد التقوس الجيوديزي للمنحني $v = const$ الواقع على السطح S.

④ اوجد الزاوية بين المنحني الاحداثي u والمنحني $v = \sinh u$ على السطح.

الحل:

$$r_u = (-v\sin u, v\cos u, a), \quad r_v = (\cos u, \sin u, 0) \Rightarrow r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v\sin u & v\cos u & a \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = (-a\sin u, a\cos u, -v)$$

$$\Rightarrow |r_u \times r_v| = \sqrt{a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u + v^2} = \sqrt{a^2+v^2} \Rightarrow n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(-a\sin u, a\cos u, -v)}{\sqrt{a^2+v^2}}$$

$$r_{uu} = (-v\cos u, -v\sin u, 0) \Rightarrow L = r_{uu} \cdot n = 0$$

Scanned by CamScanner

$r_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0) \Rightarrow M = r_{uv}\cdot n = \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}$

$r_{vv} = (0,0,0) \Rightarrow N = r_{vv}\cdot n = 0$

$E = r_u^2 = (\ldots)\; v^2\sin^2 u + v^2\cos^2 u + a^2 = v^2 + a^2$

$F = r_u r_v = (\ldots) = -v\sin u\cos u + v\cos u\sin u = 0$

$G = r_v^2 = (\ldots)\; 1$

① بما أن $M \neq 0$ فإن خطوط التقوس تعطى بالعلاقة

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ v^2+a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a/\sqrt{a^2+v^2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}\,du^2 + (v^2+a^2)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}\right)dv^2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}\,du^2 + a\sqrt{a^2+v^2}\,dv^2 = 0 \Rightarrow -a\,du^2 + a(a^2+v^2)\,dv^2 = 0$$

$$\Rightarrow dv^2 = (a^2+v^2)du^2 \Rightarrow du^2 = \frac{dv^2}{(a^2+v^2)} \Rightarrow du = \mp\frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}}$$

$$\Rightarrow u = \mp\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{v}{a} + c$$

المنحنيات التقاربية: $II = 0$

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \frac{2a}{\sqrt{a^2+v^2}}\,du\,dv$$

$II = 0 \Rightarrow du\,dv = 0 \Rightarrow u = const \;,\; v = const$

المنحنيات التقاربية هي الخطوط الإحداثية

② التقوس المتوسط: الوسطي:

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = 0$$

التقوس الكلي

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{a^2}{(a^2+v^2)}}{v^2+a^2} = \frac{-a^2}{(a^2+v^2)^2}$$

③ التقوس الجيوديزي

$r(c\cos u, c\sin u, au)$ n لمنحني الإحداثي $v = const$

$$k_g = K(r, n, T) = \frac{(n, r', r'')}{|r'|^3} =$$

$r'(-c\sin u, c\cos u, a)$ $\quad |r'| = \sqrt{c^2+a^2}$

$r''(-c\cos u, -c\sin u, 0)$

$$\Rightarrow k_g = \frac{1}{(\sqrt{a^2+c^2})^3(\sqrt{a^2+c^2})}\begin{vmatrix} -a\sin u & a\cos u & -c \\ -c\sin u & c\cos u & a \\ -c\cos u & -c\sin u & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a^2+c^2)^2}\Big[-a\sin u(-ac\sin u) - a\cos u(+ac\cos u)$$

$$- c(c^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u)\Big)$$

$$= \frac{1}{(a^2+c^2)^2}\left(ca^2\sin^2 u - a^2c\cos^2 u - c^3(\sin^2 u+\cos^2 u\right.$$

$$= \frac{1}{(a^2+c^2)^2}\left(ca^2(\sin^2 u-\cos^2 u) - c^3(1)\right)$$

$$= c($$

بحل الدكتور طلعت السمية

$$k_g = \frac{a(c^2-c^3)(\sin^2 t-\cos^2 t)}{(a^2+c^2)^2}$$

٤) زاوية بين منحنيين ١

٢ أ) ادرس الحيد

$$v = sh\,u$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{dr}{dt}, r_u\right) = \frac{\left(r_u\frac{du}{dt} + r_v\frac{dv}{dt}\right)r_u}{\left(r_u\frac{du}{dt} + r_v\frac{dv}{dt}\right)|r_u|} = \frac{\left(E\frac{du}{dt} + F\frac{dv}{dt}\right)}{\sqrt{I}\sqrt{E}} = \sqrt{\frac{E}{I}}$$

ونلاحظ على طول المنحنى $v = sh\,u$ تتغير باستمرار

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{dr}{dt}, r_u\right) = \frac{\left(r_u\frac{du}{dt} + r_v\frac{dv}{dt}\right)r_u}{\left(r_u\frac{du}{dt} + r_v\frac{dv}{dt}\right)|r_u|} = E\left(\frac{du}{dt}\right) + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

ضع $u = t$ ، $v = sh\,t$ يكون

$$= E + ch^2 t$$

ومنه

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{a^2+sh^2 t}{a^2+sh^2 t+ch^2 t}} = \sqrt{\frac{a^2+sh^2 t}{a^2+ch^2 t}}$$

ليكن S سطح معطى بالمعادلة: $r(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ v-\frac{v^3}{3}+vu^2,\ u^2-v^2\right)$

والمطلوب: 1) أدرس طبيعة نقاط السطح 2) أوجد التقوس المتوسط وتقوس غاوس

3) أوجد التقوسات الرئيسية للسطح 4) أوجد المنحنيات المقاربة و

منحنيات التقوس على هذا السطح

الحل

1)

$$\left.\begin{array}{l} r_u(1-u^2+v^2,\ 2uv,\ 2u) \\ r_v(2uv,\ 1-v^2+u^2,\ -2v) \end{array}\right\} \Rightarrow r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-u^2+v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{vmatrix} = \dots$$

نعوض ونختصر فنجد:

$$n = \left(\frac{1}{1+u^2+v^2}\right)(-2u,\ -2v,\ 1-u^2-v^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} r_{uu}=(1-2u,\ 2v,\ 2) \\ r_{uv}=(+2v,\ 2u,\ 0) \\ r_{vv}=(2u,\ -2v,\ -2) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} L=r_{uu}\cdot n=2 \\ M=r_{uv}\cdot n=0 \\ N=r_{vv}\cdot n=-2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} E=r_u^2=(1+u^2+v^2)^2 \\ F=r_u r_v=0 \\ G=r_v^2=(1+u^2+v^2)^2 \end{array}\right.$$

$LN-M^2=-4<0$ كل نقاط السطح زائدية.

التقوس الوسطي

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}=\frac{-2(1+u^2+v^2)^2+2(1+u^2+v^2)^2}{2[(1+u^2+v^2)^4]}=0$$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{-4}{2(1+u^2+v^2)^4}=\frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$$ تقوس غوص الكلي

التقوسات الرئيسية: $F=0$ ، $M=0$ التقوسات الرئيسية

$$k_1=\frac{L}{E}=\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$k_2=\frac{N}{G}=\frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

4) المنحنيات المقاربة

$II=0$

$$II=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=2du^2-2dv^2 \Rightarrow 2du^2-2dv^2=0 \Rightarrow du^2-dv^2=0$$

$$du^2=dv^2 \Rightarrow du=\mp dv \Rightarrow \boxed{u=\mp v+c}$$

منحنيات التقوس: $M=0$ ؛ منحنيات التقوس هي المنحنيات الوسيطية

ليكن السطح S المعطى بالمعادلات المتجهية $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u)$

1) ادرس طبيعة الخطوط الإحداثية على السطح S وطبيعة نقاطه

2) أوجد الخطوط المقاربة على السطح S والمنحنيات الإسطيانية له

3) أوجد التقوس الناظمي والتقوس الجيوديزي للسطح للمنحني في المعطى بالمعادلات الوسيطية
$u=1$ $v=v$

4) أوجد الزاوية بين المنحني في الدائرة في القطب السابقة والمنحني الإحداثي الوسيط v.

الحل

$$r_u = \left(\cos v, \sin v, \frac{1}{u}\right)$$
$$r_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & \frac{1}{u} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (\cos v, -\sin v, u)$$

~~$|r_u \times r_v| = \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v + u^2} = \sqrt{u^2} = u \Rightarrow n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(\cos v, -\sin v, u)}{u}$~~

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{1+u^2} \Rightarrow n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{(\cos v, -\sin v, u)}{\sqrt{1+u^2}}$$

بما أن $r_u \times r_v \neq 0$ لكل $(u,v) \in S$ فإن السطح نظامي

$$r_{uu} = \left(0, 0, \frac{-1}{u^2}\right)$$
$$r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$
$$r_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

$$L = r_{uu}\cdot n = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}$$
$$\Rightarrow M = r_{uv}\cdot n = 0$$
$$N = r_{vv}\cdot n = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$E = r_u^2 = 1 + \frac{1}{u^2}$$
$$F = r_u r_v = 0$$
$$G = r_v^2 = u^2$$

1) طبيعة الخطوط الإحداثية بما أن $F=0$ فإن الخطوط الإحداثية متعامدة
طبيعة نقاط السطح

$$LN - M^2 = \frac{+u}{u(1+u^2)} > 0$$
جميع نقاط السطح ناقصية

2) الخطوط المقاربة $II = 0$

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}du^2 - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}dv^2$$

$$II = 0 \Rightarrow \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}\,du^2 - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,d\theta^2 = 0 \quad \text{[illegible]}$$

أخرى نعني
وتعاريف قبل
التفسير الهندسي

$$\frac{-1}{u^2}\,du^2 - d\theta^2 = 0 \Rightarrow d\theta^2 = -\frac{1}{u^2}\,du^2$$

$$\frac{1}{u}\,du = d\theta \rightarrow \boxed{\ln u = \theta + c}$$

$$\frac{1}{u}\,du = -d\theta \Rightarrow \boxed{\ln u = -\theta + c}$$

عامة $M=0$, $F=0$ فإن

$$K_1 = \frac{L}{E} = \frac{\frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}}{1+\frac{1}{u^2}} = \frac{\frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}}{\frac{u^2+1}{u^2}} = \frac{-u^2}{u(u^2+1)\sqrt{1+u^2}} = \frac{-u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K_2 = \frac{N}{G} = \frac{\frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}}{u^2} = \frac{-u}{u^2\sqrt{1+u^2}} = \frac{-1}{u(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$K_n = \frac{II}{I} \longrightarrow I = E\,du^2 + 2F\,du\,d\theta + G\,d\theta^2$$
$$= \left(1+\frac{1}{u^2}\right)du^2 + u^2\,d\theta^2$$

$$\Rightarrow K_n = \frac{\frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}\,du^2 - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,d\theta^2}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du^2 + u^2\,d\theta^2} = \frac{-\frac{1}{u^2}\,du^2 - d\theta^2}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du^2 + u^2\,d\theta^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^2}}\,du^2 + \frac{-1}{u^2}\,d\theta^2$$

$$\boxed{K_n = \frac{-1}{2\sqrt{2}}}$$

نبدأ الحل

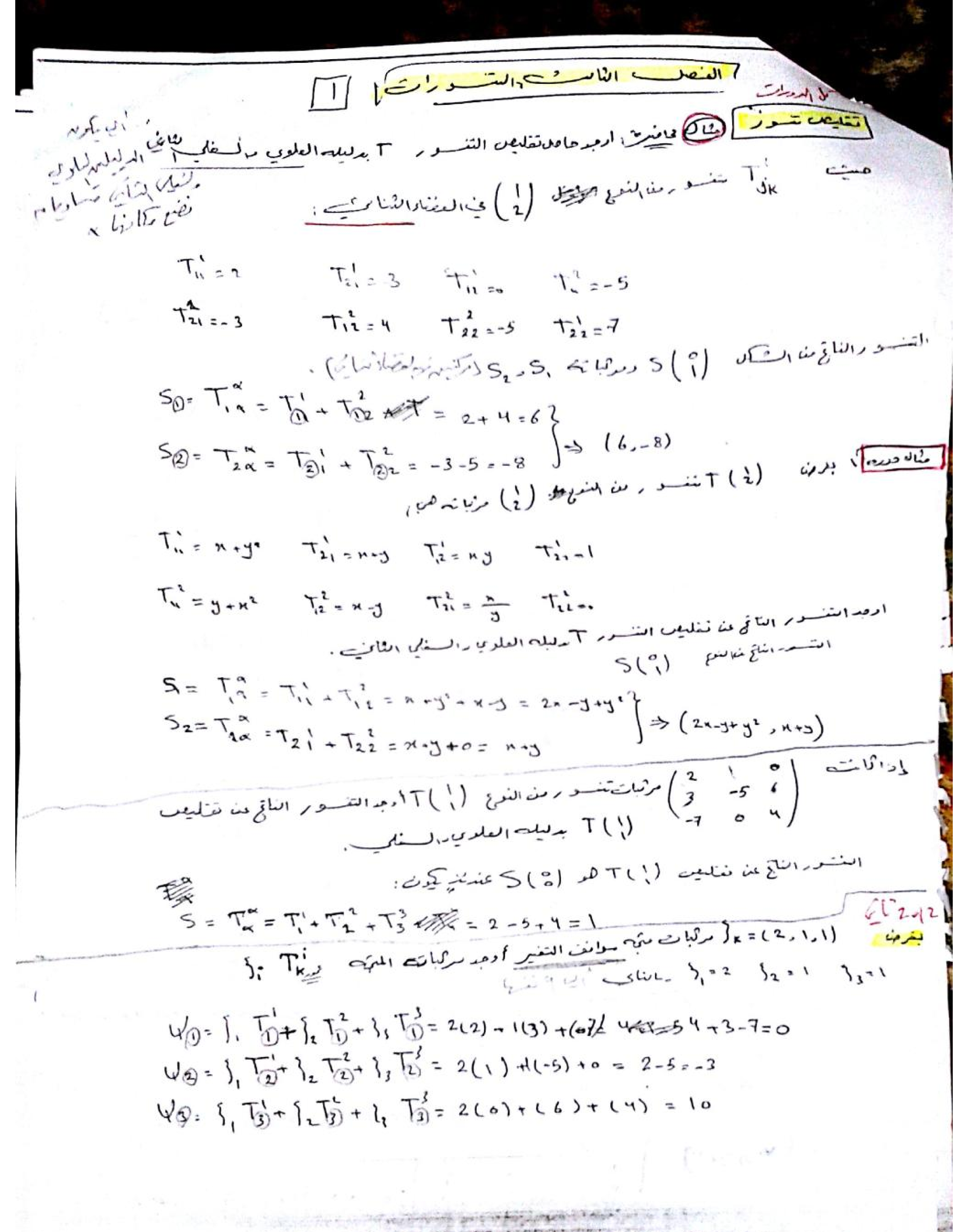
(4) الزاوية تساوي $(\frac{\pi}{2})$ لأنه
جميع الخطوط الوهمية متعامدة.

$$K_g = K(r, n, T) = \frac{(n, r', r'')}{|r'|^3}$$

$u = t$ $\quad \theta = 0$

$$r = (t, 0, \ln t) \Rightarrow r' = \left(1, 0, \frac{1}{t}\right) \qquad r'' = \left(0, 0, -\frac{1}{t^2}\right)$$

$$(n, r', r'') = \begin{vmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & u \\ 1 & 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{t^2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow K_g = 0$$ منحنى جيوديسي



حل الدورات

تقليص تنسور

مثال / تمرين: اوجد حاصل تقليص التنسور T بدليله العلوي مع السفلي الثاني حيث T^i_{jk} تنسور من النوع $\binom{1}{2}$ في الفضاء الثنائي:

أي يكون الدليل العلوي والسفلي الثاني متساويان نضع مكانهما α

$T^1_{11}=2$ $\quad T^1_{21}=-3$ $\quad T^1_{11}=0$ $\quad T^2_{1}=-5$

$T^2_{21}=-3$ $\quad T^2_{12}=4$ $\quad T^2_{22}=-5$ $\quad T^1_{22}=7$

التنسور الناتج من الشكل $S\binom{0}{1}$ ومركباته S_1, S_2 (مركبتين لأن الفضاء ثنائي).

$S_1 = T^\alpha_{1\alpha} = T^1_{11} + T^2_{12} = 2+4=6$

$S_2 = T^\alpha_{2\alpha} = T^1_{21} + T^2_{22} = -3-5=-8$

$\Rightarrow (6, -8)$

مثال دورات / بفرض $T\binom{1}{2}$ تنسور من النوع $\binom{1}{2}$ مركباته هي:

$T^1_{11}=x+y^2$ $\quad T^1_{21}=x+y$ $\quad T^1_{12}=xy$ $\quad T^1_{22}=1$

$T^2_{11}=y+x^2$ $\quad T^2_{12}=x-y$ $\quad T^2_{21}=\frac{x}{y}$ $\quad T^2_{22}=0$

اوجد التنسور الناتج من تقليص التنسور T بدليله العلوي والسفلي الثاني.

التنسور الناتج من النوع $S\binom{0}{1}$

$S_1 = T^\alpha_{1\alpha} = T^1_{11} + T^2_{12} = x+y^2+x-y = 2x-y+y^2$

$S_2 = T^\alpha_{2\alpha} = T^1_{21} + T^2_{22} = x+y+0 = x+y$

$\Rightarrow (2x-y+y^2, x+y)$

إذا كانت $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ مركبات تنسور من النوع $\binom{1}{1}$ T أوجد التنسور الناتج من تقليص $T\binom{1}{1}$ بدليله العلوي والسفلي.

التنسور الناتج عن تقليص $T\binom{1}{1}$ هو $S\binom{0}{0}$ عندئذٍ يكون:

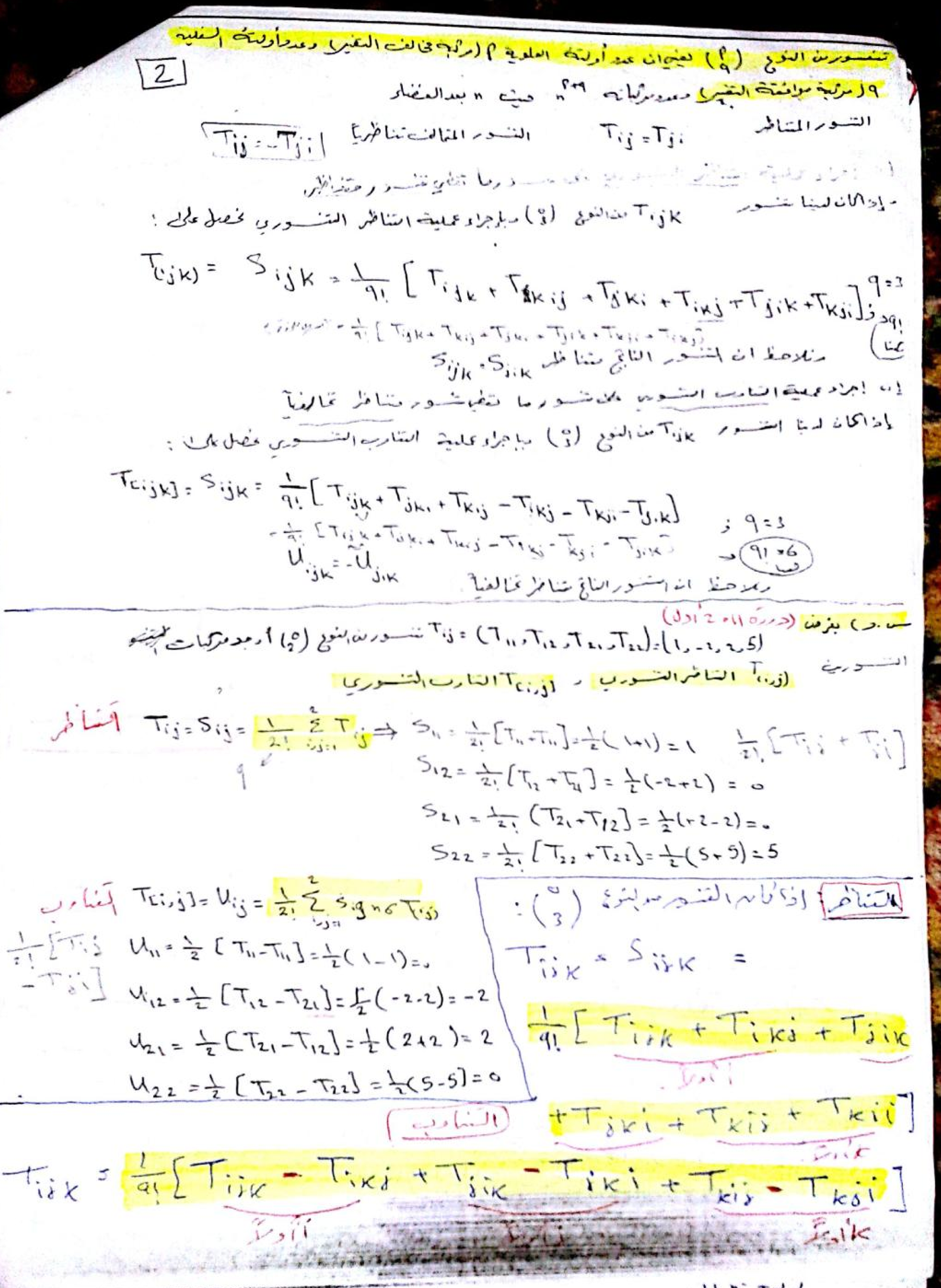
$S = T^\alpha_\alpha = T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 = 2-5+4=1$

بفرض $\xi_x=(2,1,1)$ مركبات متجه موافق التغير أوجد مركبات المتجه $\xi_i T^i_k$ علماً أن $\xi_1=2$ $\quad \xi_2=1$ $\quad \xi_3=1$

$\psi_1 = \xi_1 T^1_1 + \xi_2 T^2_1 + \xi_3 T^3_1 = 2(2)+1(3)+(-7) = 4+3-7=0$

$\psi_2 = \xi_1 T^1_2 + \xi_2 T^2_2 + \xi_3 T^3_2 = 2(1)+1(-5)+0 = 2-5=-3$

$\psi_3 = \xi_1 T^1_3 + \xi_2 T^2_3 + \xi_3 T^3_3 = 2(0)+(6)+(4) = 10$



2

تنسور من النوع $\binom{p}{q}$ نعبان عدد أدلته العلوية p (مرتبة مخالف التغير) وعدد أدلته السفلية q (مرتبة موافقة التغير) وعدد مركباته n^{p+q} حيث n بعد الفضاء

التنسور المتناظر $T_{ij} = T_{ji}$ التنسور المتخالف تناظريا $T_{ij} = -T_{ji}$

- إذا كان لدينا تنسور T_{ijk} من النوع $\binom{0}{3}$ وبإجراء عملية التناظر التنسوري نحصل على:

$$T_{(ijk)} = S_{ijk} = \frac{1}{q!}\left[T_{ijk} + T_{kij} + T_{jki} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{kji}\right] ; q = 3$$

$$= \frac{1}{q!}\left[T_{ijk} + T_{kij} + T_{jki} + T_{jik} + T_{kji} + T_{ikj}\right]$$

ونلاحظ ان التنسور الناتج متناظر $S_{ijk} = S_{jik}$

إن إجراء عملية التشارب التنسوري على تنسور ما تعطي تنسور متناظر تخالفيا

إذا كان لدينا التنسور T_{ijk} من النوع $\binom{0}{3}$ وبإجراء عملية التشارب التنسوري نحصل على:

$$T_{[ijk]} = S_{ijk} = \frac{1}{q!}\left[T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{ikj} - T_{kji} - T_{jik}\right] ; q = 3$$

$$= \frac{1}{q!}\left[T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{ikj} - T_{kji} - T_{jik}\right] \quad q! = 6$$

$$U_{ijk} = -U_{jik}$$

ونلاحظ ان التنسور الناتج متناظر تخالفيا

س.د) بفرض (دورة 2011 أول) $T_{ij} = (T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}) = (1, -2, 2, 5)$ تنسور من النوع $\binom{0}{2}$ أوجد مركبات التنسور $T_{(i,j)}$ التناظر التنسوري و $T_{[i,j]}$ التشارب التنسوري

التناظر
$$T_{ij} = S_{ij} = \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{2} T_{ij} \Rightarrow \frac{1}{2!}\left[T_{ij} + T_{ji}\right]$$

$$S_{11} = \frac{1}{2!}\left[T_{11} + T_{11}\right] = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$S_{12} = \frac{1}{2!}\left[T_{12} + T_{21}\right] = \frac{1}{2}(-2+2) = 0$$

$$S_{21} = \frac{1}{2!}\left(T_{21} + T_{12}\right] = \frac{1}{2}(+2-2) = 0$$

$$S_{22} = \frac{1}{2!}\left[T_{22} + T_{22}\right] = \frac{1}{2}(5+5) = 5$$

التشارب
$$T_{[i,j]} = U_{ij} = \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{2} \operatorname{sign}\sigma\, T_{(ij)} \quad \frac{1}{2!}\left[T_{ij} - T_{ji}\right]$$

$$U_{11} = \frac{1}{2}\left[T_{11} - T_{11}\right] = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$U_{12} = \frac{1}{2}\left[T_{12} - T_{21}\right] = \frac{1}{2}(-2-2) = -2$$

$$U_{21} = \frac{1}{2}\left[T_{21} - T_{12}\right] = \frac{1}{2}(2+2) = 2$$

$$U_{22} = \frac{1}{2}\left[T_{22} - T_{22}\right] = \frac{1}{2}(5-5) = 0$$

التناظر: إذا كان التنسور من النوع $\binom{0}{3}$:

$$T_{ijk} = S_{ijk} = \frac{1}{q!}\left[T_{ijk} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{jki} + T_{kij} + T_{kji}\right]$$

التشارب

$$T_{ijk} = \frac{1}{q!}\left[T_{ijk} - T_{ikj} + T_{jik} - T_{jki} + T_{kij} - T_{kji}\right]$$

[illegible] : T_{ijk} تنسور متناظر تخالفياً بالنسبة للدليلين i, j. **أثبت أن:**

[3]

$$T_{[ijk]} = \frac{1}{3}\left(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}\right)$$

الحل:

$$T_{[ijk]} = \frac{1}{6}\left[T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji}\right]$$

لكن كون T_{ijk} متناظر تخالفياً بالتعويض في ⓐ نجد ⇐

$T_{ijk} = -T_{jik}$ ، $T_{jki} = -T_{ikj}$ ، $T_{kij} = -T_{kji}$

$$T_{[ijk]} = \frac{1}{6}\left(2T_{ijk} + 2T_{jki} + 2T_{kij}\right) = \frac{1}{3}\left(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}\right)$$

نفرض T_i مركبات تنسور من النوع $\binom{0}{1}$ أثبت أن $S_{ij} = T_iT_j - T_jT_i$ هي مركبات تنسور متناظر تخالفياً من النوع $\binom{0}{2}$

$$T_iT_j - T_jT_i = T_r\frac{dx^r}{dx_i}\cdot T_s\frac{dx^s}{dx_j} - T_s\frac{dx^s}{dx_j}\cdot T_r\frac{dx^r}{dx_i}$$

$$= T_rT_s\frac{dx^r}{dx_i}\frac{dx^s}{dx_j} - T_sT_r\frac{dx^s}{dx_j}\cdot\frac{dx^r}{dx_i}$$

$$= (T_rT_s - T_sT_r)\frac{dx^r}{dx_i}\cdot\frac{dx^s}{dx_j} = S_{rs}\frac{\partial x^r}{dx_i}\cdot\frac{dx^s}{dx_j}$$

واضح أن:

$$S_{ij} + S_{ji} = T_iT_j - T_jT_i + T_jT_i - T_iT_j = 0 \Rightarrow S_{ij} = -S_{ji}$$

شرط التناظر التخالفي محقق وبالتالي التنسور S_{ij} متناظر تخالفياً.

12/2012

خفض ورفع أدلة تنسور (هام) وذلك بمساعدة التنسور المتري g_{ij}

لخفض الدليل العلوي لتنسور $\binom{p}{q}$ «مثلاً أول دليل» فإننا نحصل على تنسور من النوع $\binom{p-1}{q+1}$ وهو

فالخفض $T_{i_1 j_1 \cdots j_q}^{\;i_2 \cdots i_p} = g_{i_1\alpha}\cdot T_{j_1\cdots j_q}^{\alpha i_2\cdots i_p}$ ، $\alpha = 1,\ldots,n$

لرفع الدليل السفلي لتنسور $\binom{p}{q}$ فإننا نحصل على تنسور من النوع $\binom{p+1}{q-1}$ وهو:

فالرفع $T_{j_2\cdots j_q}^{j_1 i_1\cdots i_p} = g^{j_1\alpha}\,T_{\alpha j_2\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$ ، $\alpha = 1,\ldots,n$

مثال: ليكن التنسور المتري $g_{ij} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ والتنسور من النوع $\binom{1}{1}$ على R^2 مركباته

$T_1^{\,1} = -1$ ، $T_2^{\,1} = 0$ ، $T_1^{\,2} = T_2^{\,2} = -2$

أوجد التنسور الناتج عن خفض الدليل العلوي ثم التنسور الناتج عن رفع الدليل السفلي.

نلاحظ أن التنسور الناتج عن خفض الدليل العلوي هو V من النوع $\binom{0}{2}$ ومركباته هي

الدليل الذي نخفضه نفسه نضعه ... [illegible]

$$V_{11} = g_{1\alpha}T_1^{\alpha} = g_{11}T_1^{1} + g_{12}T_1^{2} = 1(-1) + 2(-2) = -1-4 = -5$$

$$V_{12} = g_{1\alpha}T_2^{\alpha} = g_{11}T_2^{1} + g_{12}T_2^{2} = 1(0) + 2(-2) = -4$$

أدلة V

4

$$V_{21} = g_{2\alpha} T^{\alpha}_{1} = g_{21} T^{1}_{1} + g_{22} T^{2}_{1} = 2(-1) + 3(-2) = -2-6=-8$$

$$V_{22} = g_{2\alpha} T^{\alpha}_{2} = g_{21} T^{1}_{2} + g_{22} T^{2}_{2} = 2(0) + 3(-2) = -6$$

رفع الدليل السفلي: نفرض أن التنسور [illegible] الدليل السفلي [illegible] $\binom{2}{0}$ [illegible]

2011 أول.

$$g^{ij} = \frac{1}{\det g_{ij}} (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

الدليل الثاني [illegible]

$$S^{11} = g^{1\alpha} T^{1}_{\alpha} = g^{11} T^{1}_{1} + g^{12} T^{1}_{2} = -3(-1) + 2(0) = +3$$

$$S^{21} = g^{2\alpha} T^{1}_{\alpha} = g^{21} T^{1}_{1} + g^{22} T^{1}_{2} = 2(-1) + (-1)(0) = -2$$

$$S^{12} = g^{1\alpha} T^{2}_{\alpha} = g^{11} T^{2}_{1} + g^{12} T^{2}_{2} = -3(-2) + 2(-2) = +6-4 = 2$$

$$S^{22} = g^{2\alpha} T^{2}_{\alpha} = g^{21} T^{2}_{1} + g^{22} T^{2}_{2} = 2(-2) + (-1)(-2) = -4+2 = -2$$

أثبت) أنه في تنسور ما إذا خفضنا دليل ما ثم رفعناه فإن ذلك الدليل نحصل على نفس التنسور.

نفرض لدينا التنسور $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ لنخفض الدليل i_1 فنحصل على التنسور

$$T^{i_2 \dots i_p}_{i_1 j_1 \dots j_q} = g_{i_1 \alpha} T^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

والآن لنرفع الدليل i_1 في التنسور الناتج في الطرف الأخير:

$$g^{i_1 \beta} T^{i_2 \dots i_p}_{\beta j_1 \dots j_q} = g^{i_1 \beta} g_{\beta \alpha} T^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

إيجاد مركبات التنسور المتري في احداثيات منحنية معينة:

$$g_{ij} = J^T J$$

مثال) أوجد التنسور المتري في إحداثيات المستوي القطبية (ρ, θ)

نكتب x و y بدلالة القاعدة المعطاة ثم نفرض المشتقات الجزئية الجدول اليعقوبي:

$x = \rho \cos\theta$ $\qquad$ $y = \rho \sin\theta$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow J^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = J^T J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$g_{11} = 1 \qquad g_{12} = 0$

$g_{21} = 0 \qquad g_{22} = \rho^2$

Subject:

Date:

مركبات التنسور المتري في الاحداثيات الاسطوانية :
(ρ, θ, z)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

في الكروية (R, θ, ϕ)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

سأقوم بحساب طول قوس منحني بين نقطتين t_1 , t_2 :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)^T (g_{ij})\left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\,\frac{\partial x^i}{\partial t}\,\frac{\partial x^j}{\partial t}}\; dt$$

تمرين : أوجد مركبات التنسور المتري g_{ij} في الاحداثيات المنحنية $(\bar{x}, \bar{y})$ المعرفة بالشكل : $\bar{x} = x , \quad \bar{y} = e^{y-x}$

② أوجد طول منحني $\bar{x} = 3t , \quad \bar{y} = e^t$ حيث $0 \le t \le 2$ بدلالة الصيغة التربيعية لطول القوس.

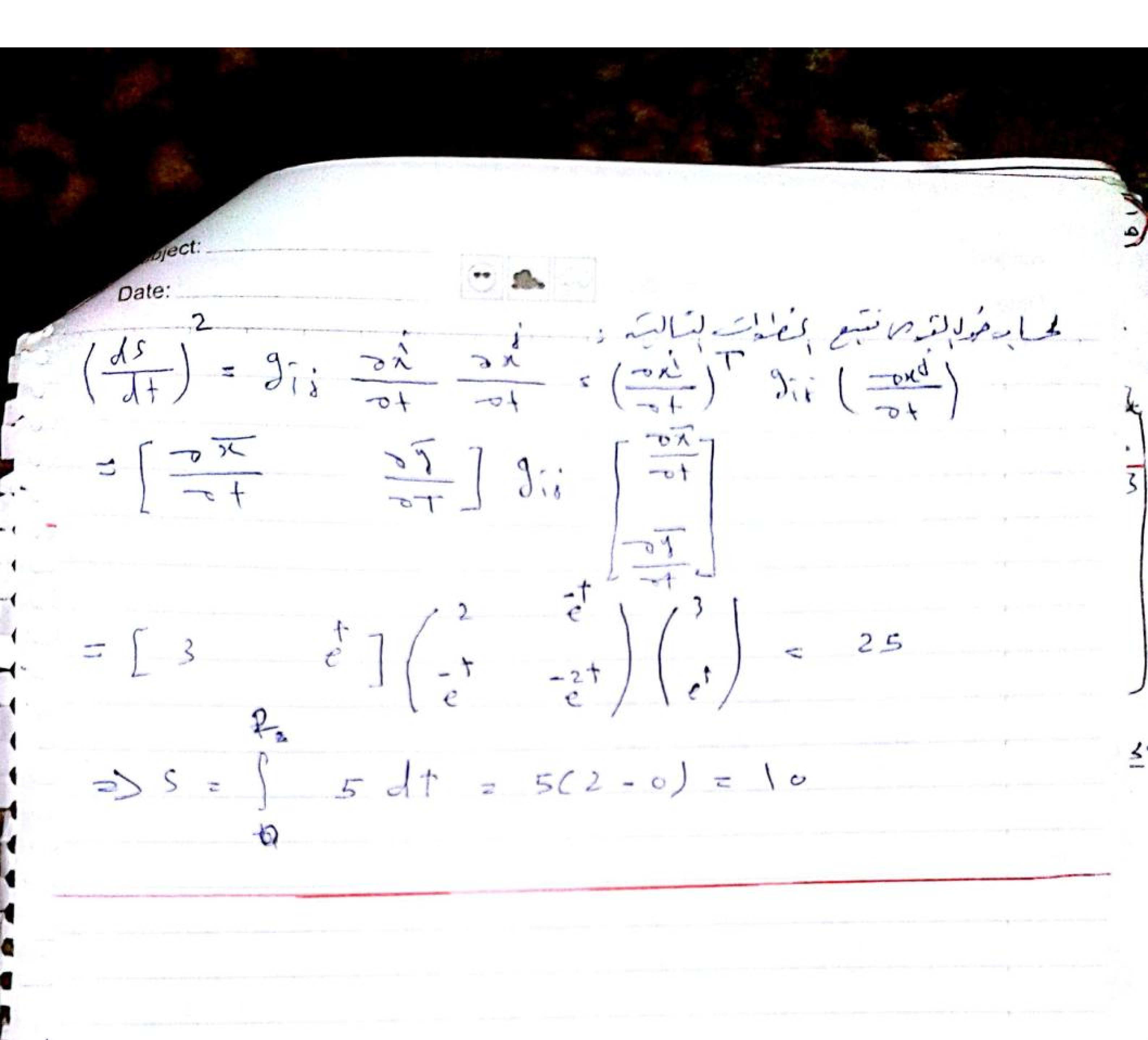
الحل : نكتب الاحداثيات الديكارتية بدلالة $\bar{x} , \bar{y}$:

$\boxed{x = \bar{x}} , \quad y - \bar{x} = \ln\bar{y} \Rightarrow \boxed{y = \bar{x} + \ln\bar{y}}$

نوجد اليعقوبي الانتقال من الاحداثيات المنحنية إلى الديكارتية :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{y}} \end{bmatrix} \Rightarrow g_{ij} = J^T J$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\bar{y}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{\bar{y}} \\ \frac{1}{\bar{y}} & \frac{1}{\bar{y}^2} \end{pmatrix}$$



Subject:

Date:

لحساب طول القوس نتبع الخطوات التالية :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial t} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)^T g_{ij}\left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix} g_{ij} \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 & e^{t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 \\ e^{t}\end{pmatrix} = 25$$

$$\Rightarrow S = \int_0^2 5\,dt = 5(2-0) = 10$$

Date:

$$\bar{T}_1^{\,2} = \left[T_1^1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^1 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + T_3^1 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} +$$

$$\left[T_1^2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + T_3^2 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \left[T_1^3 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^3 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + T_3^3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial z}$$

$T_1^1 = 1 \;,\; T_2^1 = x,\; T_1^2 = y,\; T_2^2 = 0$

$$\bar{T}^{1}_{1,1} = \left[T_1^1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \Big| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^1 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \Big| \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$$

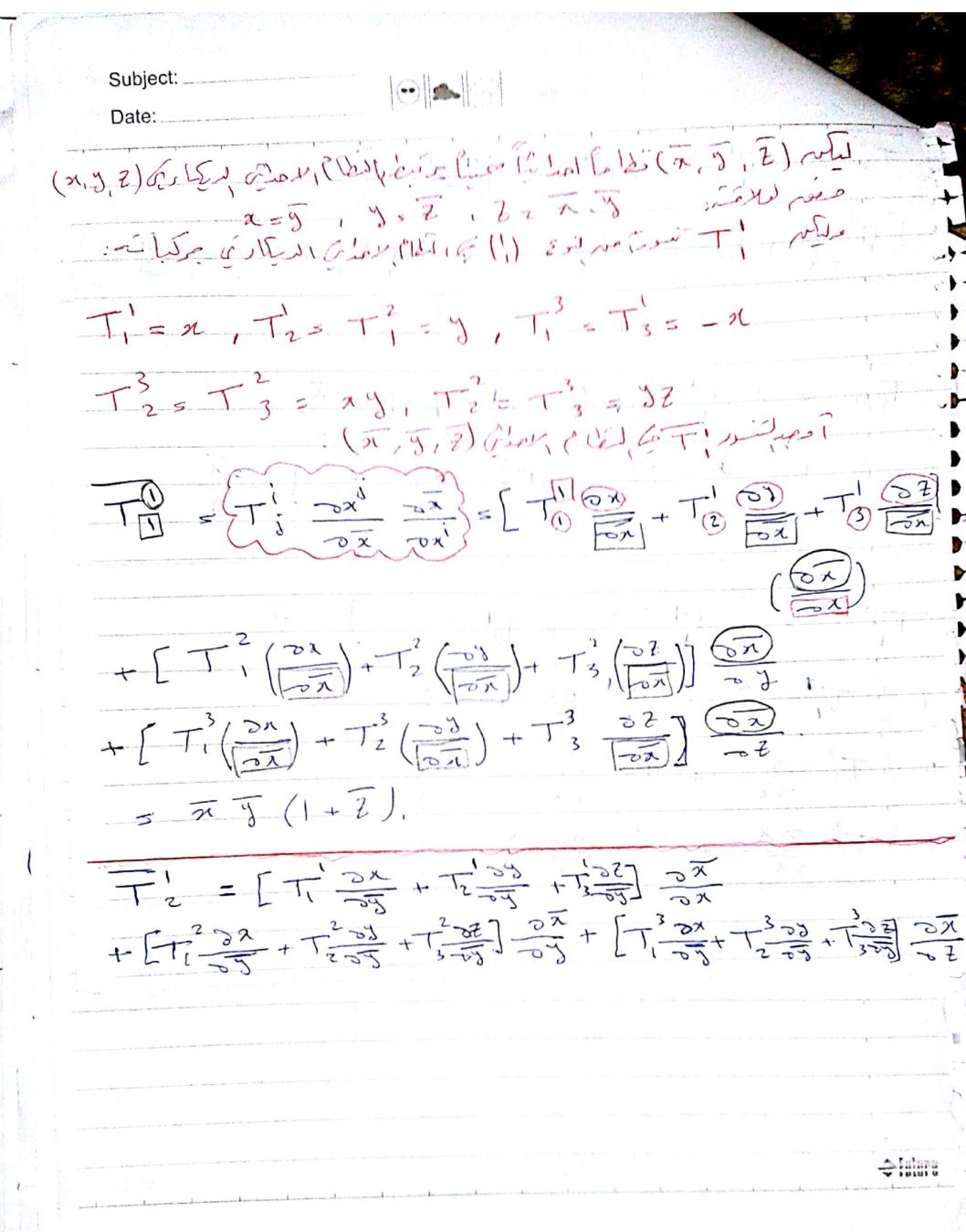
$$+ \left[T_1^2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}$$

$$\bar{T}_1^{1,2} = \left[T_1^1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^1 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$$

$$+ \left[T_1^1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^1 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}$$

$$+ \left[T_1^2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}$$

$$+ \left[T_1^2 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T_2^2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}$$


Subject:

Date:

ليكن $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ نظاماً احداثياً معيناً مرتبطاً بالنظام الاحداثي الديكارتي (x, y, z) معرف بالعلاقات:

$$x = \bar{y}, \quad y = \bar{z}, \quad z = \bar{x}\,\bar{y}$$

وليكن T^1_1 تنسوراً من النوع $(1,1)$ في النظام الاحداثي الديكارتي مركباته:

$$T^1_1 = x, \quad T^1_2 = T^2_1 = y, \quad T^3_1 = T^1_3 = -x$$

$$T^3_2 = T^2_3 = xy, \quad T^2_2 = T^3_3 = yz$$

أوجد التنسور $\bar{T}^1_1$ في النظام الاحداثي $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

$$\bar{T}^1_1 = T^i_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x^i} = \left[T^1_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T^1_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + T^1_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \right] \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)$$

$$+ \left[T^2_1 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right) + T^2_2 \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right) + T^2_3 \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \right) \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}$$

$$+ \left[T^3_1 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right) + T^3_2 \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right) + T^3_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}$$

$$= \bar{x}\,\bar{y}\,(1 + \bar{z}).$$

$$\bar{T}^1_2 = \left[T^1_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + T^1_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + T^1_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$$

$$+ \left[T^2_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + T^2_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + T^2_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \left[T^3_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + T^3_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + T^3_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}$$

6

(س ٥) بفرض $(\bar{x}, \bar{y})$ نظام إحداثي ما مرتبط بالنظام الإحداثي (x, y) بالعلاقات

$$\bar{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \bar{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

إذا كان التنسور T^i مركباته $T_1 = xy \quad T_2 = \frac{x}{y}$ فأوجد مركبات التنسور في النظام الإحداثي الجديد $(\bar{x}, \bar{y})$

* معطينا علاقة بين نظامين احداثيين (x, y) و $(\bar{x}, \bar{y})$ ومركبات تنسور بالنسبة للنظام (x, y) ومطلوب ايجاد مركبات التنسور في النظام $(\bar{x}, \bar{y})$

خطوات الحل: ① نوجد x و y بدلالة $\bar{x}$ و $\bar{y}$

② نوجد مشتقة كل منهما بالنسبة للمتغيرات الاخرى (8 مشتقات)

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial y}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}$$

③ نعوض في القانون لإيجاد مركبات T بالنسبة للنظام [illegible] الثاني.

الحل

$$\bar{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow ① \; x = (x^2+y^2)\,\bar{x}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow ② \; y = (x^2+y^2)\,\bar{y}$$

بالتربيع والجمع

$$x^2+y^2 = (\bar{x}^2+\bar{y}^2)(x^2+y^2)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}$$

فنعوض في علاقة ① نستخرج x وفي علاقة ② نستخرج y حسناً ???

$$\Rightarrow x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2} \qquad y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}$$

$$\frac{dx}{d\bar{x}} = \frac{\bar{x}^2+\bar{y}^2-2\bar{x}^2}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2} = \frac{\bar{y}^2-\bar{x}^2}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2}$$

$$\frac{dx}{d\bar{y}} = \frac{-2\bar{x}\bar{y}}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{dy}{d\bar{x}} = \frac{-2\bar{x}\bar{y}}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2}$$

$$\frac{dy}{d\bar{y}} = \frac{\bar{x}^2+\bar{y}^2-2\bar{y}^2}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2} = \frac{\bar{x}^2-\bar{y}^2}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2}$$

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{d\bar{y}}{dy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

بالتعويض في القانون

$$\bar{T}^k = T^i \frac{d\bar{y}^k}{dx^i}$$

$$\bar{T}^1 = T^1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + T^2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = xy\left(\frac{d\bar{x}}{dx}\right) + \frac{x}{y}\frac{d\bar{x}}{dy} = x\cdot y\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{x}{y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) \ldots$$

$$= \frac{x\cdot y(y^2-x^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\bar{T}^2 = T^1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + T^2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = xy\left(\frac{d\bar{y}}{dx}\right) + \frac{x}{y}\left(\frac{d\bar{y}}{dy}\right)$$

$$= xy\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{x}{y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{x^3-xy^2-2x^2y^3}{y(x^2+y^2)^2}$$

7

اثبت ان $g_{ij} = \begin{pmatrix} x^2-1 & 1 & 0 \\ 1 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 46/9 \end{pmatrix}$ حيث $(x^2-1)y^2 \neq 0$ والمطلوب

g_{ij} تمثل مركبات تنسور متري على R^3

احسب طول المنحنى المعطى بالمعادلات التالية

$x = 2t-1 \quad y = 2t^2 \quad z = t^3 ; 0 \leq t \leq 1$

$g_{ij} = g_{ji}$ ... دالة $g_{ij} \in C^2$ ... $\det g_{ij} \neq 0$ بدراسة التنسور

الحل نلاحظ أن g_{ij} متناظرة أيضاً g_{ij}

$(g_{ij}) = (g_{ji})$ كما أن ...

$$\det(g_{ij}) = \frac{46}{9} \begin{vmatrix} x^2-1 & 1 \\ 1 & y^2 \end{vmatrix} = \frac{46}{9}\left[(x^2-1)y^2 - 1\right] \neq 0$$

• أن $g_{ij} \in C^2$ قابلة للمفاضلة (لأنها حدود بالنسبة لـ x و y)

• بالتالي تحقق شروط المترية فهذا g_{ij} تمثل مركبات تنسور متري على R^3

(2) طول المنحنى

$$\frac{dx}{dt} = 2 \qquad \frac{dy}{dt} = 4t \qquad \frac{dz}{dt} = 3t^2$$

$x^2 - 1 = (2t-1)^2 - 1 = 4t^2 - 4t$

$$\left(\frac{ds}{dT}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt}\right) g_{ij} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = (2 \quad 4t \quad 3t^2) \begin{pmatrix} 4t^2-4t & 1 & 0 \\ 1 & 4t^4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{46}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$= (2 \quad 4t \quad 3t^2) \begin{pmatrix} 8t^2 - 8t + 4t \\ 2 + 16t^5 \\ \frac{46}{3}t^3 \end{pmatrix} = 16t^2 - 16t + 8t + 8t + 64t^6 + 46t^5$$

$$= 16t^2 + 64t^6 + 46t^5$$

$$= (8t^3 + 4t)^2$$

$$L = \int_0^1 (8t^3 + 4t)\,dt = \left[2t^4 + 2t^2\right]_0^1 = 2 + 2 = 4$$

الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} u^i v^j}{\sqrt{g_{ij} u^i u^j}\sqrt{g_{ij} v^i v^j}}$$

حيث u^i مشتقات مركبات المتجه u على منحنيه الأول

v^i مشتقات مركبات منحنى v على شكل منحنيه الثاني

• في المقام: الجذر الأول هو طول المتجه الأول والجذر الثاني هو طول المتجه الثاني

إذا u, v متعامدين يكون $\cos\theta = 0 \Leftarrow u \perp v$

إذن شرط التعامد

$g_{ij} u^i v^j = 0$

ج

الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\, u^i\, v^j}{\sqrt{g_{ij}\, u^i u^j}\ \sqrt{g_{ij}\, v^i v^j}}$$

حيث u^i مشتقات مركبات المتجه u على شكل مصفوفة سطرية [illegible]

حيث v^i مشتقات مركبات المتجه v على شكل مصفوفة عمود [illegible]

في المقام إن الجزء الأول هو طول المتجه الأول الجذر الثاني هو طول المتجه الثاني

إذا كان البسط معدوم يكون $\cos\theta = 0 \Leftarrow u \perp v$

إذن شرط التعامد هو $g_{ij}\, u^i\, v^j = 0$

تمرين أثبت باستخدام التنسور المتري g_{ij} في الإحداثيات القطبية أن المتجهين متعامدان (أثرا)

$$u^i = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5\rho}\right) \qquad v^i = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5\rho}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\, u^i\, v^j}{\sqrt{g_{ij}\, u^i u^j}\ \sqrt{g_{ij}\, v^i v^j}}$$

ل نيار

$$|u|^2 = g_{ij}\, u^i u^j = \left[\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5\rho}\right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5\rho} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5\rho}\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4\rho}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{5\rho} \times \frac{4\rho}{5} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25}$$

$$= 1 \neq 0$$

$$|v|^2 = g_{ij}\, v^i v^j = \left(-\frac{4}{5} \quad \frac{3}{5\rho}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5\rho} \end{pmatrix} = \left(-\frac{4}{5} \quad \frac{3}{5\rho}\right) \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3\rho}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1 \neq 0$$

$$g_{ij}\, u^i v^j = \left(\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5\rho}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5\rho} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5\rho}\right) \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3\rho}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{-4}{5} + \frac{4}{5\rho} \times \frac{3\rho}{5} = -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \perp v$$

(ز، ي، س) نظام إحداثي منحني يرتبط بالنظام الإحداثي الديكارتي (x,y,z) 9

بالعلاقة: $z = \bar{x}\bar{y}$ $y = \bar{z}$ $x = \bar{y}$ والمطلوب:

① أوجد التنسور (g_{ij}) في الإحداثيات المنحنية $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

② أثبت أن المتجهين $U^{j} = (-\bar{x}/\bar{y}, 1, 0)$ ، $V^{i} = (1/\bar{y}, 0, 0)$ (i,j = 1,2,3) متعامدان

③ أوجد مركبات المتجه $V_i = g_{i\alpha} V^{\alpha}$ الناتج عن تخفيض الدليل i في المتجه السابق V^{i}

الحل لدينا

$x = \bar{y}$ $y = \bar{z}$ $z = \bar{x}\bar{y}$ وبالتالي

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{y} \\ 1 & 0 & \bar{x} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

عندئذٍ

$$g_{ij} = J^{T} J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{y} \\ 1 & 0 & \bar{x} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}^2 & \bar{x}\bar{y} & 0 \\ \bar{x}\bar{y} & 1+\bar{x}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② لدينا تعامد متجهين $g_{ij} V^{i} U^{j} = 0$ وبالتالي نجد

$$\begin{pmatrix} 1/\bar{y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}^2 & \bar{x}\bar{y} & 0 \\ \bar{x}\bar{y} & 1+\bar{x}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\bar{x}}{\bar{y}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{y}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \\ -\bar{x}^2 + 1 + \bar{x}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{y}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

لذا فهذان الشرط محقق وبالتالي المتجهان متعامدان.

③ حسبا $V^{i} = (\frac{1}{\bar{y}}, 0, 0)$ ، $V_i = g_{i\alpha} V^{\alpha}$

$$V_1 = g_{1\alpha} V^{\alpha} = g_{11} V^1 + g_{12} V^2 + g_{13} V^3 = \bar{y}^2 \frac{1}{\bar{y}} + \bar{x}\bar{y}(0) + 0 = \bar{y}$$

$$V_2 = g_{2\alpha} V^{\alpha} = g_{21} V^1 + g_{22} V^2 + g_{23} V^3 = \frac{\bar{x}\bar{y}}{\bar{y}} + (1+\bar{x}^2)(0) + 0 = \bar{x}$$

$$V_3 = g_{3\alpha} V^{\alpha} = g_{31} V^1 + g_{32} V^2 + g_{33} V^3 = 0$$